Mathematik

Abiturprüfung 2015

Prüfungsteil A (CAS)

Arbeitszeit: 90 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

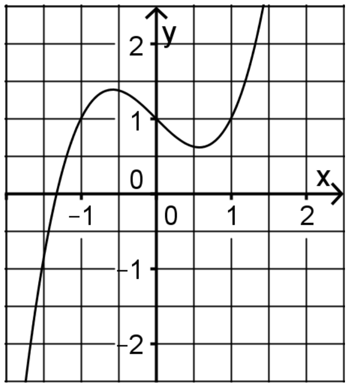
Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

3 **1** Bestimmen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Lösungen der Gleichung
$(4x-3)\cdot\ln\left(x^2-5x+7\right)=0$.

2 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h mit
$f(x)=x^2-x+1$, $g(x)=x^3-x+1$ und $h(x)=x^4+x^2+1$.

3 **a)** Die Abbildung zeigt den Graphen einer der drei Funktionen. Geben Sie an, um welche Funktion es sich handelt. Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.



2 **b)** Die erste Ableitungsfunktion von h ist h'.

Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^1 h'(x)\,dx$.

3 **3** Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \sin(2x)$. Geben Sie Amplitude, Periode und Wertemenge der Funktion f an.

4 Geben Sie jeweils den Term einer Funktion an, die die angegebene(n) Eigenschaft(en) besitzt.

2 **a)** Die Funktion g hat die maximale Definitionsmenge $]-\infty; 5]$.

3 **b)** Die Funktion k hat in $x=2$ eine Nullstelle und in $x=-3$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel. Der Graph von k hat die Gerade mit der Gleichung $y=1$ als Asymptote.

4 **5** Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a: x \mapsto xe^{ax}$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ermitteln Sie, für welchen Wert von a die erste Ableitung von f_a an der Stelle $x=2$ den Wert 0 besitzt.

20

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \left(x^3 - 8\right) \cdot (2 + \ln x)$ mit maximalem Definitionsbereich D.

1 **a)** Geben Sie D an.

2 **b)** Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

2 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h mit $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x + 1$ und $h(x) = x^4 + x^2 + 1$.

3 **a)** Abbildung 1 zeigt den Graphen einer der drei Funktionen. Geben Sie an, um welche Funktion es sich handelt. Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.

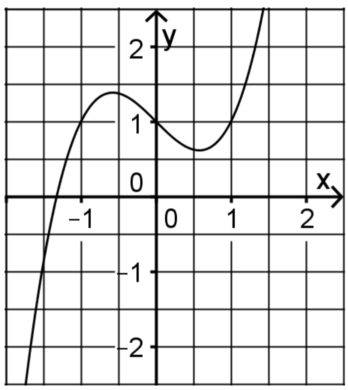


Abb. 1

2 **b)** Die erste Ableitungsfunktion von h ist h'.

Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^1 h'(x)\,dx$.

1 **3 a)** Geben Sie einen positiven Wert für den Parameter a an, sodass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \sin(ax)$ eine Nullstelle in $x = \frac{\pi}{6}$ hat.

2 **b)** Ermitteln Sie den Wert des Parameters b, sodass die Funktion $g: x \mapsto \sqrt{x^2 - b}$ den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus]-2;2[$ besitzt.

2 **c)** Erläutern Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto 4 - e^x$ den Wertebereich $]-\infty;4[$ besitzt.

2 **4** Abbildung 2 zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten differenzierbaren Funktion $g: x \mapsto g(x)$. Mithilfe des Newton-Verfahrens soll ein Näherungswert für die Nullstelle a von g ermittelt werden. Begründen Sie, dass weder die x-Koordinate des Hochpunkts H noch die x-Koordinate des Tiefpunkts T als Startwert des Newton-Verfahrens gewählt werden kann.

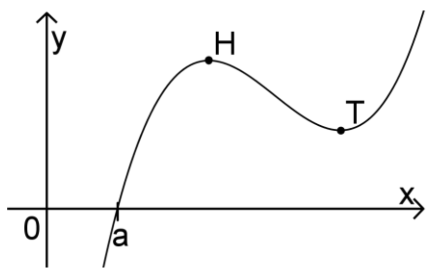


Abb. 2

(Fortsetzung nächste Seite)

5 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ und $x \in \mathbb{R}$.

3 **a)** Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt des Graphen von f auf der Geraden mit der Gleichung $y = x - 2$ liegt.

2 **b)** Der Graph von f wird verschoben. Der Punkt $(2\,|\,0)$ des Graphen der Funktion f besitzt nach der Verschiebung die Koordinaten $(3\,|\,2)$. Der verschobene Graph gehört zu einer Funktion h. Geben Sie eine Gleichung von h an.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Bei der Wintersportart Biathlon wird bei jeder Schießeinlage auf fünf Scheiben geschossen. Ein Biathlet tritt bei einem Einzelrennen zu einer Schießeinlage an, bei der er auf jede Scheibe einen Schuss abgibt. Diese Schießeinlage wird modellhaft durch eine Bernoullikette mit der Länge 5 und der Trefferwahrscheinlichkeit p beschrieben.

3 **a)** Geben Sie für die folgenden Ereignisse A und B jeweils einen Term an, der die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in Abhängigkeit von p beschreibt.

A: „Der Biathlet trifft bei genau vier Schüssen."
B: „Der Biathlet trifft nur bei den ersten beiden Schüssen."

2 **b)** Erläutern Sie anhand eines Beispiels, dass die modellhafte Beschreibung der Schießeinlage durch eine Bernoullikette unter Umständen der Realität nicht gerecht wird.

2 Ein Moderator lädt zu seiner Talkshow drei Politiker, eine Journalistin und zwei Mitglieder einer Bürgerinitiative ein. Für die Diskussionsrunde ist eine halbkreisförmige Sitzordnung vorgesehen, bei der nach den Personen unterschieden wird und der Moderator den mittleren Platz einnimmt.

1 **a)** Geben Sie einen Term an, mit dem die Anzahl der möglichen Sitzordnungen berechnet werden kann, wenn keine weiteren Einschränkungen berücksichtigt werden.

4 **b)** Der Sender hat festgelegt, dass unmittelbar neben dem Moderator auf einer Seite die Journalistin und auf der anderen Seite einer der Politiker sitzen soll. Berechnen Sie unter Berücksichtigung dieser weiteren Einschränkung die Anzahl der möglichen Sitzordnungen.

10

Stochastik

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 In einer Urne befinden sich vier rote und sechs blaue Kugeln. Aus dieser wird achtmal eine Kugel zufällig gezogen, die Farbe notiert und die Kugel anschließend wieder zurückgelegt.

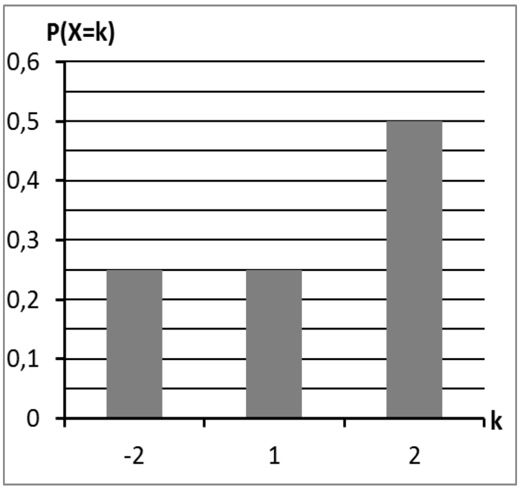
2 **a)** Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Es werden gleich viele rote und blaue Kugeln gezogen.“ berechnet werden kann.

3 **b)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang jeweils ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den angegebenen Term berechnet werden kann.

α) $1-\left(\frac{3}{5}\right)^8$

β) $\left(\frac{3}{5}\right)^8+8\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^7$

2 Für ein Zufallsexperiment wird eine Zufallsgröße X festgelegt, welche die drei Werte -2, 1 und 2 annehmen kann. In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.



2 **a)** Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung den Erwartungswert der Zufallsgröße X.

3 **b)** Das Zufallsexperiment wird zweimal durchgeführt. Dabei wird jeweils der Wert der Zufallsgröße X notiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe dieser beiden Werte negativ ist.

10

Geometrie

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE	
	1 Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(0\,|\,1\,|\,2)$ und $B(2\,|\,5\,|\,6)$.
3	**a)** Zeigen Sie, dass die Punkte A und B den Abstand 6 haben. Die Punkte C und D liegen auf g und haben von A jeweils den Abstand 12. Bestimmen Sie die Koordinaten von C und D.
2	**b)** Die Punkte A, B und $E(1\,|\,2\,|\,5)$ sollen mit einem weiteren Punkt die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden. Für die Lage des vierten Eckpunkts gibt es mehrere Möglichkeiten. Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten die Koordinaten des vierten Eckpunkts an.
	2 Betrachtet wird die Pyramide ABCDS mit $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(4\,|\,4\,|\,2)$, $C(8\,|\,0\,|\,2)$, $D(4\,|\,-4\,|\,0)$ und $S(1\,|\,1\,|\,-4)$. Die Grundfläche ABCD ist ein Parallelogramm.
2	**a)** Weisen Sie nach, dass das Parallelogramm ABCD ein Rechteck ist.
3	**b)** Die Kante $[AS]$ steht senkrecht auf der Grundfläche ABCD. Der Flächeninhalt der Grundfläche beträgt $24\sqrt{2}$. Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide.
10	

Geometrie

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

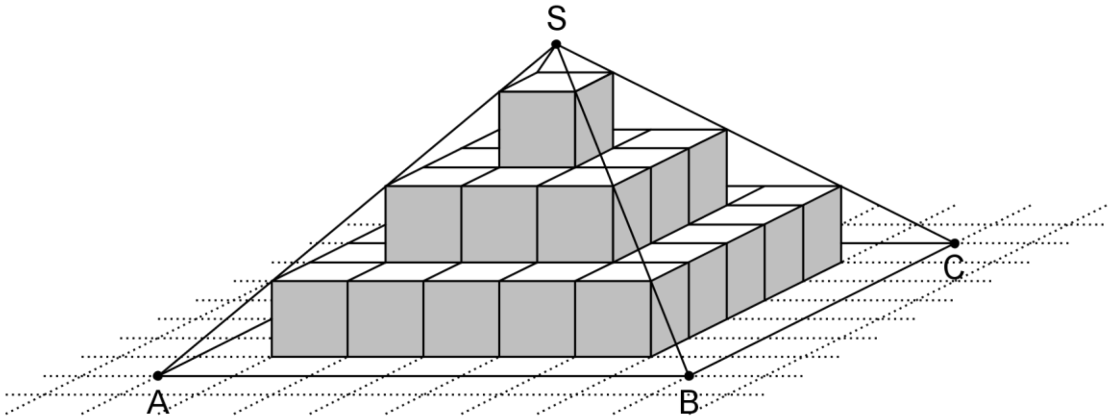
BE

1 Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(0|1|2)$ und $B(2|5|6)$.

3 **a)** Zeigen Sie, dass die Punkte A und B den Abstand 6 haben.
Die Punkte C und D liegen auf g und haben von A jeweils den Abstand 12. Bestimmen Sie die Koordinaten von C und D.

2 **b)** Die Punkte A, B und $E(1|2|5)$ sollen mit einem weiteren Punkt die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden. Für die Lage des vierten Eckpunkts gibt es mehrere Möglichkeiten.
Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten die Koordinaten des vierten Eckpunkts an.

2 Die Abbildung zeigt die Pyramide ABCDS mit quadratischer Grundfläche ABCD. Der Pyramide ist eine Stufenpyramide einbeschrieben, die aus Würfeln mit der Kantenlänge 1 besteht.



2 **a)** Geben Sie das Volumen der Stufenpyramide und die Höhe der Pyramide ABCDS an.

3 **b)** Bestimmen Sie unter Verwendung eines geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystems eine Gleichung für die Gerade, die durch die Punkte B und S verläuft.
Zeichnen Sie das gewählte Koordinatensystem in die Abbildung ein.

10