Mathematik

Abiturprüfung 2016

Prüfungsteil B (CAS)

Arbeitszeit: 180 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der hinsichtlich seiner Funktionalität den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht,
- **ein Computeralgebrasystem, das den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.**

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

____

Name des Prüflings

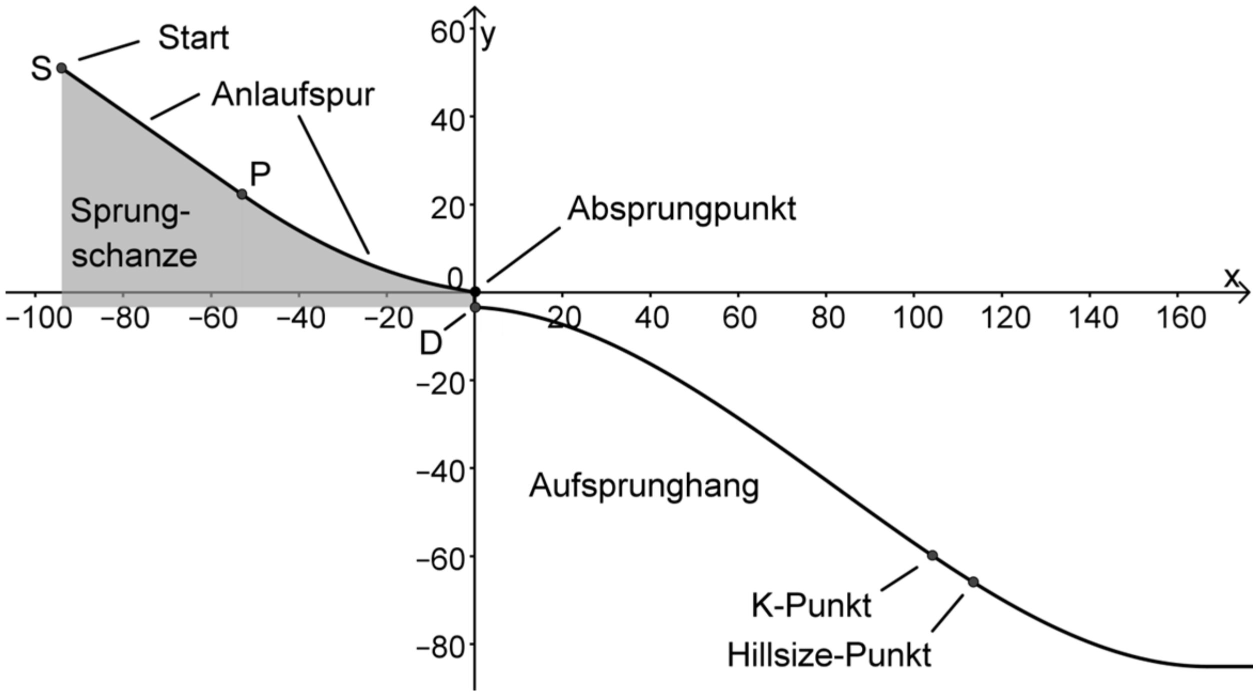
Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

Die Abbildung zeigt modellhaft die Profillinie einer Skisprunganlage, die aus der Sprungschanze und dem Aufsprunghang besteht. Das kartesische Koordinatensystem ist so gewählt, dass die x-Achse die Horizontale beschreibt und der Koordinatenursprung mit dem Ende der Anlaufspur, dem sogenannten Absprungpunkt, zusammenfällt; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht dabei einem Meter in der Realität.



1 Der höchste Punkt der Anlaufspur wird durch den Punkt $S(-94\,|\,51)$ dargestellt. Die Anlaufspur verläuft im Modell zwischen den Punkten S und P entlang einer Geraden, die gegenüber der x-Achse um $-35°$ geneigt ist.

3 **a)** Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden durch S und P. Runden Sie im Ergebnis auf eine Nachkommastelle.

4 **b)** Die Punkte S und P liegen in der Realität 50 m voneinander entfernt. Berechnen Sie die Koordinaten von P auf eine Nachkommastelle genau.

Der Aufsprunghang beginnt im Modell im Punkt D, der sich vertikal unterhalb des Absprungpunkts befindet. Die Profillinie des Aufsprunghangs lässt sich im Bereich $[0; 160]$ durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$h: x \mapsto 3{,}36 \cdot 10^{-5} x^3 - 0{,}00827x^2 - 0{,}0455x - 3{,}38$$

beschreiben.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 **2 a)** Geben Sie die Höhe des Absprungpunkts über dem Beginn des Aufsprunghangs sowie die Steigung des Aufsprunghangs in seinem Beginn an.

8 **b)** Derjenige Punkt, in dem die Profillinie im unteren Bereich des Aufsprunghangs einen Neigungswinkel von $-32°$ gegenüber der Horizontalen aufweist, wird als Hillsize-Punkt bezeichnet (vgl. Abbildung). Die Größe einer Skisprunganlage wird durch die Länge der Strecke zwischen dem Absprungpunkt und dem Hillsize-Punkt festgelegt und als Hillsize bezeichnet.
Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells die Hillsize auf Meter genau und berechnen Sie deren prozentuale Abweichung von der tatsächlichen Hillsize dieser Skisprunganlage, die 132 m beträgt.

3 Zur Beschreibung der Flugkurve eines Skispringers wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $s: x \mapsto -4{,}2 \cdot 10^{-3} x^2 - 0{,}1x$ verwendet. Dabei ist die Sprungweite die Länge der Profillinie des Aufsprunghangs zwischen dem Punkt D und dem Punkt L, der den Landepunkt des Skispringers auf dem Aufsprunghang beschreibt.

2 **a)** Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts L auf eine Nachkommastelle genau.

(Teilergebnis: x-Koordinate des Punkts L: 114,6)

Die als Kurvenlänge ℓ bezeichnete Länge des Graphen der Funktion h zwischen den Punkten $\left(a \mid h(a)\right)$ und $\left(b \mid h(b)\right)$ mit $a < b$ kann mithilfe der Formel $\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left[h'(x)\right]^2}\,dx$ berechnet werden.

Hinweis: Führen Sie die Berechnungen in den Aufgaben 3b und 3c mit dem CAS jeweils näherungsweise durch!

3 **b)** Bestimmen Sie die Sprungweite des Skispringers; berücksichtigen Sie dabei, dass beim Skispringen Sprungweiten nur auf halbe Meter genau angegeben werden.

(Ergebnis: 132,5 m)

Der K-Punkt (kritischer Punkt) der hier betrachteten Skisprunganlage liegt so auf der Profillinie, dass die Kurvenlänge zwischen ihm und dem Beginn des Aufsprunghangs, die sogenannte K-Punkt-Weite, 120 m beträgt.

4 **c)** Ermitteln Sie die Koordinaten des K-Punkts auf eine Nachkommastelle genau.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 **d)** Für einen Sprung auf den K-Punkt einer Skisprunganlage bekommt ein Springer 60 Weitenpunkte. Für jeden halben Meter, den er kürzer bzw. weiter springt, werden Weitenpunkte gemäß nachstehender Tabelle subtrahiert bzw. addiert. Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Weitenpunkte für den betrachteten Sprung.

K-Punkt-Weite der Sprunganlage in Metern	**Weitenpunkte pro halbem Meter**
70 - 79	1,1
80 - 99	1,0
100 - 169	0,9
ab 170	0,6

4 **e)** Die Landung ist für den Springer umso schwieriger, je größer der Winkel zwischen Aufsprunghang und Flugkurve im Landepunkt ist. Berechnen Sie die Größe dieses Winkels für den betrachteten Sprung.

3 **f)** Formulieren Sie im Sachzusammenhang eine Aufgabenstellung, die mit folgendem Lösungsweg gelöst werden kann.

$$d(x) = s(x) - h(x)$$
$$d'(x) = 0 \Rightarrow x_1 \approx 7{,}4;\; x_2 \approx 73{,}4$$
$$d(x_1) \approx 3{,}2;\; d(x_2) \approx 8{,}0$$
$\Rightarrow$ Der gesuchte Wert beträgt etwa 8,0 m.

4 **g)** Zur Beschreibung der Flugkurve eines zweiten Skispringers wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion t verwendet. Dabei gilt

$$t(0) = 0, \quad t'(0) = -0{,}087 \quad \text{und} \quad t(105) = h(105).$$

Entscheiden Sie jeweils, welcher der beiden Skispringer unter einem betragsmäßig größeren Winkel gegenüber der Horizontalen abspringt und welcher die größere Sprungweite erzielt. Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

40

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

1 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x}{x+3}$ mit maximalem Definitionsbereich D_f. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

4 **a)** Geben Sie D_f, den Wertebereich W_f von f sowie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an.

2 **b)** Der Graph der Funktion g geht aus G_f durch eine Verschiebung hervor und ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Geben Sie eine Gleichung von g an.

3 **c)** Die Funktion f ist umkehrbar. Beschreiben Sie, wie man den Term der Umkehrfunktion von f bestimmen kann, und geben Sie Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion von f an.

4 **d)** Der Graph der Funktion f und der Graph der Umkehrfunktion von f schneiden sich im Koordinatenursprung. Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die beiden Graphen im Koordinatenursprung einschließen.

4 **e)** Die Punkte $O(0\,|\,0)$ und $A(a\,|\,1)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ sind Eckpunkte eines Rechtecks, dessen Seiten parallel zur x-Achse bzw. zur y-Achse sind. Das Rechteck wird von G_f in zwei Teilflächen gleichen Inhalts zerlegt. Bestimmen Sie einen Näherungswert für a auf zwei Dezimalen genau.

2 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_k: x \mapsto \frac{x^2}{x^2+k^2}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$.

2 **a)** Begründen Sie ausschließlich anhand des Funktionsterms $f_k(x)$, ohne Verwendung von Ableitungen, dass alle Funktionen f_k an der Stelle $x = 0$ ein Minimum besitzen.

4 **b)** Weisen Sie nach, dass alle Wendepunkte der Graphen der Schar f_k auf einer Parallelen zur x-Achse liegen.

5 **c)** In dieser Aufgabe ist $k = 4$. Für jedes $p \in \mathbb{R}^+$ legen die Punkte $O(0\,|\,0)$, $P_p(p\,|\,f_4(p))$ und $Q_p(p\,|\,1)$ das Dreieck OP_pQ_p fest. Bestimmen Sie dessen Flächeninhalt A_p in Abhängigkeit von p und ermitteln Sie anschließend denjenigen Wert von p, für den der Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks maximal ist.

(Teilergebnis: $A_p = \frac{8p}{p^2+16}$)

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $w: x \mapsto 13{,}5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{50} \cdot x\right)$.

2 **a)** Zeichnen Sie den Graphen der Funktion w im Intervall $[-25; 175]$ in ein geeignet skaliertes Koordinatensystem ein.

2 **b)** Geben Sie an, wie der Graph der Funktion w schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $s: x \mapsto \sin(x)$ hervorgeht.

Ein quaderförmiges Aluminiumblech besitzt eine quadratische Grundfläche der Seitenlänge 1 m und eine Dicke von 2,0 mm. Es wird in einer Maschine zu einem Wellblechelement mit unverändertem Volumen umgeformt (vgl. Abbildung 1).

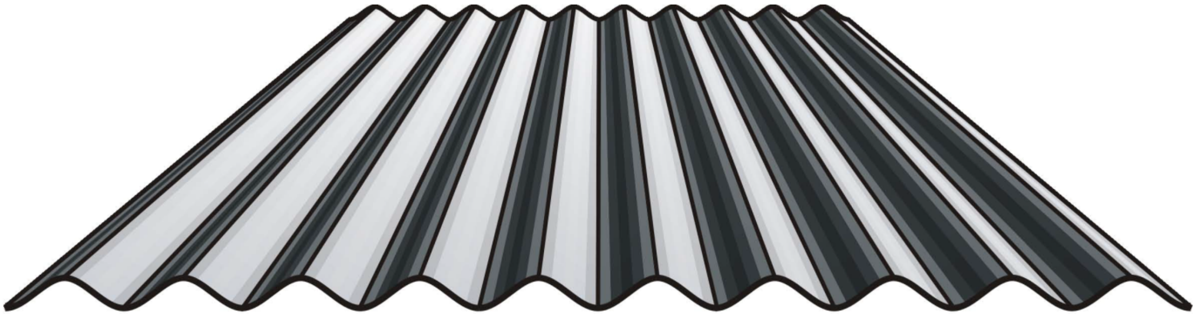


Abb. 1

Von oben betrachtet deckt das Wellblechelement weiterhin ein Quadrat der Seitenlänge 1 m ab, seine mittlere Dicke ist folglich geringer als 2,0 mm. Die Profillinie des Wellblechelements (vgl. Abbildung 2) kann durch ein Teilstück des Graphen von w beschrieben werden; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht dabei 1 mm in der Realität.

Abb. 2

4 **c)** Bestimmen Sie die mittlere Dicke des Wellblechelements auf Zehntelmillimeter genau. Verwenden Sie dabei, dass für die Länge ℓ des Funktionsgraphen der Funktion w zwischen den Punkten $(a \mid w(a))$ und $(b \mid w(b))$ mit $a < b$ gilt: $\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [w'(x)]^2}\, dx$.

4 **d)** Das Wellblechelement wird auf einer ebenen Dachfläche so angebracht, dass es unmittelbar aufliegt. Der dabei entstehende Hohlraum wird ausgeschäumt. Bestimmen Sie das Volumen, das der Schaum einnimmt; vernachlässigen Sie dabei die Dicke des Wellblechelements.

40

Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

Ein Getränkehersteller führt eine Werbeaktion durch, um die Verkaufszahlen seiner Saftschorlen zu erhöhen. Bei 100 000 der für die Werbeaktion produzierten zwei Millionen Flaschen wird auf der Innenseite des Verschlusses eine Marke für einen Geldgewinn angebracht. Von den Gewinnmarken sind 12 000 jeweils 5 € wert, der Rest ist jeweils 1 € wert. Alle Flaschen der Werbeaktion werden zufällig auf Kästen verteilt. Im Folgenden werden nur Flaschen aus der Werbeaktion betrachtet.

1 Es wird eine Flasche geöffnet. Betrachtet werden folgende Ereignisse:
A: „Der Verschluss enthält eine Gewinnmarke."
B: „Der Verschluss enthält eine Gewinnmarke im Wert von 1 €."

2 **a)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$.

2 **b)** Es werden mehrere Flaschen geöffnet und für jede dieser Flaschen wird festgestellt, ob das Ereignis A eintritt. Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment näherungsweise durch eine Bernoullikette beschrieben werden kann.

Im Folgenden gilt beim Öffnen einer Flasche stets $P(A) = 0{,}05$ und $P(B) = 0{,}044$.

3 **c)** Es werden nacheinander zehn Flaschen geöffnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich erstmals in der letzten Flasche eine Gewinnmarke befindet und diese den Wert 5 € hat.

4 **d)** Bestimmen Sie, z. B. durch systematisches Probieren, wie viele Flaschen man mindestens öffnen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 5 % mindestens zwei Gewinnmarken zu finden.

3 **e)** Berechnen Sie den Gesamtwert der Gewinnmarken, die Kunden beim Öffnen der 20 Flaschen eines Kastens im Mittel in den Verschlüssen finden.

(Fortsetzung nächste Seite)

Nachdem die zwei Millionen Flaschen verkauft sind, wird die Werbeaktion fortgesetzt. Der Getränkehersteller verspricht, dass weiterhin jede 20. Flasche eine Gewinnmarke enthält. Aufgrund von Kundenäußerungen vermutet der Filialleiter eines Getränkemarkts jedoch, dass der Anteil der Saftschorle-Flaschen mit einer Gewinnmarke im Verschluss nun geringer als 0,05 ist, und beschwert sich beim Getränkehersteller.

6 **2** Der Getränkehersteller bietet ihm an, anhand von 200 zufällig ausgewählten Flaschen einen Signifikanztest für die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit dafür, in einer Flasche eine Gewinnmarke zu finden, beträgt mindestens 0,05.“ auf einem Signifikanzniveau von 1 % durchzuführen. Für den Fall, dass das Ergebnis des Tests im Ablehnungsbereich der Nullhypothese liegt, verspricht der Getränkehersteller, seine Abfüllanlage zu überprüfen und die Kosten für eine Sonderwerbeaktion des Getränkemarkts zu übernehmen.

Ermitteln Sie den Ablehnungsbereich der Nullhypothese und bestimmen Sie anschließend unter der Annahme, dass im Mittel nur 3 % der Saftschorle-Flaschen eine Gewinnmarke enthalten, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Getränkemarkt nicht in den Genuss einer kostenlosen Sonderwerbeaktion kommt.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

3 **1** Nach einem Bericht zur Allergieforschung aus dem Jahr 2008 litt damals in Deutschland jeder vierte bis fünfte Einwohner an einer Allergie. 41 % aller Allergiker reagierten allergisch auf Tierhaare.
Kann aus diesen Aussagen gefolgert werden, dass 2008 mindestens 10 % der Einwohner Deutschlands auf Tierhaare allergisch reagierten?
Begründen Sie Ihre Antwort.

2 Nach einer aktuellen Erhebung leiden 25 % der Einwohner Deutschlands an einer Allergie. Aus den Einwohnern Deutschlands werden n Personen zufällig ausgewählt.

3 **a)** Bestimmen Sie, wie groß n mindestens sein muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens eine der ausgewählten Personen an einer Allergie leidet.

3 **b)** Ermitteln Sie, z. B. durch systematisches Probieren, wie groß n mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens 25 der ausgewählten Personen an einer Allergie leiden, kleiner als 10 % ist.

4 **c)** Im Folgenden ist $n = 200$. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Personen unter den ausgewählten Personen, die an einer Allergie leiden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert der binomialverteilten Zufallsgröße X höchstens um eine Standardabweichung von ihrem Erwartungswert abweicht.

3 Ein Pharmaunternehmen hat einen Hauttest zum Nachweis einer Tierhaarallergie entwickelt. Im Rahmen einer klinischen Studie zeigt sich, dass der Hauttest bei einer aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählten Person mit einer Wahrscheinlichkeit von 39,5 % ein positives Testergebnis liefert. Leidet eine Person an einer Tierhaarallergie, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % positiv. Das Testergebnis ist jedoch bei einer Person, die nicht an einer Tierhaarallergie leidet, mit einer Wahrscheinlichkeit von 35 % ebenfalls positiv.

3 **a)** Ermitteln Sie, welcher Anteil der Bevölkerung Deutschlands demnach allergisch auf Tierhaare reagiert. *(Ergebnis: 9 %)*

(Fortsetzung nächste Seite)

2 **b)** Eine aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählte Person wird getestet; das Testergebnis ist positiv. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person tatsächlich an einer Tierhaarallergie leidet.

2 **c)** Aus der Bevölkerung Deutschlands wird eine Person zufällig ausgewählt und getestet. Beschreiben Sie das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit im Sachzusammenhang mit dem Term $0,09 \cdot 0,15 + 0,91 \cdot 0,35$ berechnet wird.

20

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(6|3|3)$, $B(3|6|3)$ und $C(3|3|6)$ das gleichseitige Dreieck ABC fest.

3 **a)** Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Dreieck ABC liegt, in Normalenform.

(mögliches Ergebnis: $E: x_1 + x_2 + x_3 - 12 = 0$)

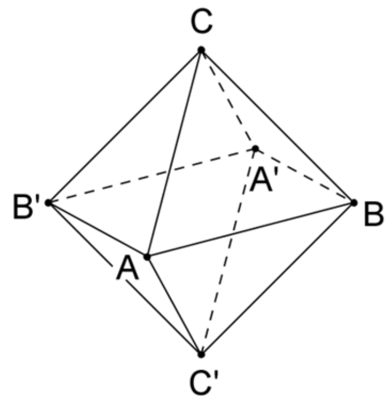
Spiegelt man die Punkte A, B und C am Symmetriezentrum $Z(3|3|3)$, so erhält man die Punkte A', B' bzw. C'.

3 **b)** Beschreiben Sie die Lage der Ebene, in der die Punkte A, B und Z liegen, im Koordinatensystem. Zeigen Sie, dass die Strecke $[CC']$ senkrecht auf dieser Ebene steht.

4 **c)** Begründen Sie, dass das Viereck $ABA'B'$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $3\sqrt{2}$ ist.

2 **d)** Berechnen Sie den Abstand des Punkts Z von der Ebene E.

Der Körper $ABA'B'CC'$ ist ein sogenanntes Oktaeder. Er besteht aus zwei Pyramiden mit dem Quadrat $ABA'B'$ als gemeinsamer Grundfläche und den Pyramidenspitzen C bzw. C'.



2 **e)** Weisen Sie nach, dass das Oktaeder das Volumen 36 besitzt.

3 **f)** Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Seitenflächen ABC und $AC'B$.

3 **g)** Alle Eckpunkte des Oktaeders liegen auf einer Kugel. Geben Sie eine Gleichung dieser Kugel an.
Berechnen Sie den Anteil des Oktaedervolumens am Kugelvolumen.

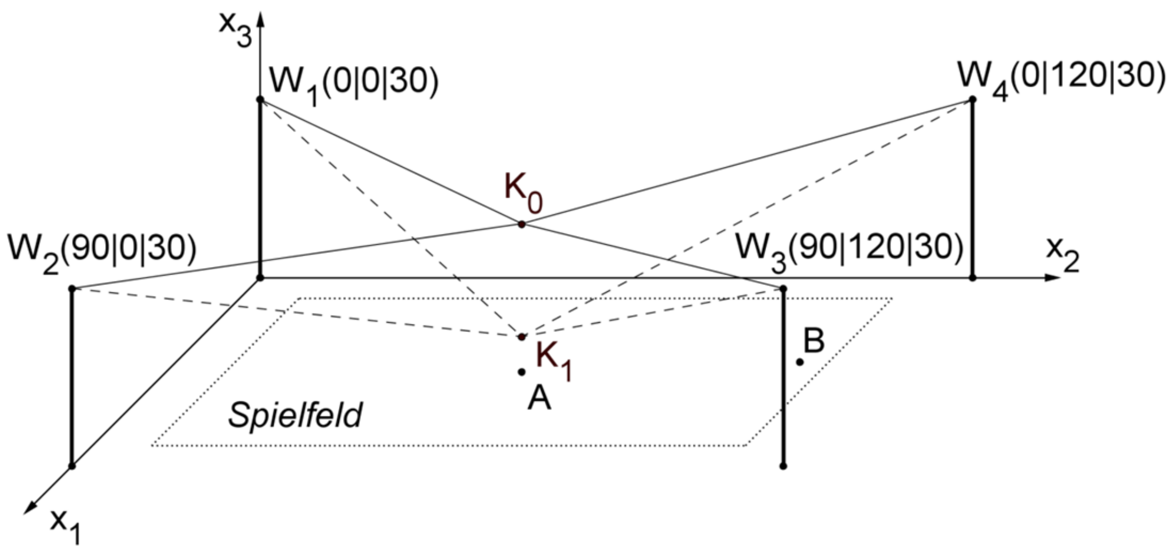
20

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Für die Fernsehübertragung eines Fußballspiels wird über dem Spielfeld eine bewegliche Kamera installiert. Ein Seilzugsystem, das an vier Masten befestigt wird, hält die Kamera in der gewünschten Position. Seilwinden, welche die Seile koordiniert verkürzen und verlängern, ermöglichen eine Bewegung der Kamera.
In der Abbildung ist das horizontale Spielfeld modellhaft als Rechteck in der x_1x_2-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems dargestellt. Die Punkte W_1, W_2, W_3 und W_4 beschreiben die Positionen der vier Seilwinden. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität, d. h. alle vier Seilwinden sind in einer Höhe von 30 m angebracht.



Der Punkt $A(45\,|\,60\,|\,0)$ beschreibt die Lage des Anstoßpunkts auf dem Spielfeld. Die Kamera befindet sich zunächst in einer Höhe von 25 m vertikal über dem Anstoßpunkt. Um den Anstoß zu filmen, wird die Kamera um 19 m vertikal abgesenkt. In der Abbildung ist die ursprüngliche Kameraposition durch den Punkt K_0, die abgesenkte Position durch den Punkt K_1 dargestellt.

4 **a)** Berechnen Sie die Seillänge, die von jeder der vier Seilwinden abgerollt werden muss, um dieses Absenken zu ermöglichen, wenn man davon ausgeht, dass die Seile geradlinig verlaufen.

2 **b)** Berechnen Sie die Größe des Winkels, den das Seilstück, das im Modell durch die Strecke $[W_1K_1]$ beschrieben wird, mit der Horizontalen einschließt.

(Fortsetzung nächste Seite)

Kurze Zeit später legt sich ein Torhüter den Ball für einen Abstoß bereit. Der Abstoß soll von der Kamera aufgenommen werden. Durch das gleichzeitige Verlängern beziehungsweise Verkürzen der vier Seile wird die Kamera entlang einer geraden Bahn zu einem Zielpunkt bewegt, der in einer Höhe von 10 m über dem Spielfeld liegt. Im Modell wird der Zielpunkt durch den Punkt K_2 beschrieben, die Bewegung der Kamera erfolgt vom Punkt K_1 entlang der Geraden g mit der Gleichung $g: \vec{X} = \vec{K_1} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, zum Punkt K_2.

3 **c)** Bestimmen Sie die Koordinaten von K_2.

(Ergebnis: $K_2(51|100|10)$)

3 **d)** Im Zielpunkt ist die Kamera zunächst senkrecht nach unten orientiert. Um die Position des Balls anzuvisieren, die im Modell durch den Punkt $B(40|105|0)$ beschrieben wird, muss die Kamera gedreht werden. Berechnen Sie die Größe des erforderlichen Drehwinkels.

Der Torwart führt den Abstoß aus. Der höchste Punkt der Flugbahn des Balls wird im Modell durch den Punkt $H(50|70|15)$ beschrieben.

6 **e)** Ermitteln Sie eine Gleichung der durch die Punkte W_1, W_2 und K_2 festgelegten Ebene E in Normalenform und weisen Sie nach, dass H unterhalb von E liegt.

(Mögliches Teilergebnis: $E: x_2 + 5x_3 - 150 = 0$)

2 **f)** Machen Sie plausibel, dass folgende allgemeine Schlussfolgerung falsch ist: „Liegen der Startpunkt und der anvisierte höchste Punkt einer Flugbahn des Balls im Modell unterhalb der Ebene E, so kann der Ball entlang seiner Bahn die Seile, die durch $[W_1K_2]$ und $[W_2K_2]$ beschrieben werden, nicht berühren."

20